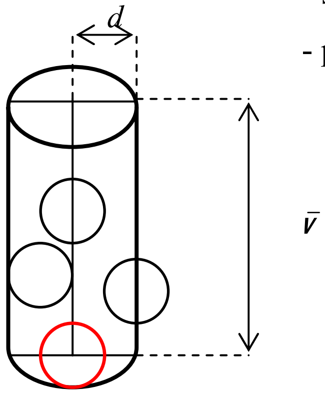
3. Srážky molekul, střední volná dráha

- **Srážky jedné molekuly s ostatními molekulami stejného druhu za jednotku času z_A = frekvence srážek**

Zjednodušená představa: - molekuly jsou koule o průměru *d* - tzv. efektivní srážkový průměr,
- srážka = jakýkoliv dotyk molekul,
- pouze vybraná molekula se pohybuje, ostatní jsou v klidu.

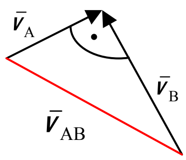


Za jednotku času urazí molekula průměrnou dráhu $\bar{v}$ a narazí do všech molekul, které budou ve válci o poloměru *d* a výšce $\bar{v}$.

$$z_{\mathrm{A}} = \pi d^2 \bar{v} \frac{N}{V} \qquad [z_{\mathrm{A}}] = s^{-1}$$

Zpřesnění: všechny molekuly jsou v pohybu. Střední aritmetickou rychlost je třeba nahradit vzájemnou střední rychlostí .

Vzájemná střední rychlost dvou rozdílných částic A a B $\bar{v}_{\mathrm{AB}}$:



Částice se srážejí pod různými úhly z intervalu 0-180°, v průměru můžeme uvažovat úhel 90°. Pro střední vzájemnou rychlost pak platí:

$$\bar{v}_{\mathrm{AB}} = \sqrt{\bar{v}_{\mathrm{A}}^{\,2} + \bar{v}_{\mathrm{B}}^{\,2}}$$

$$\bar{v}_{\mathrm{AB}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi}\left(\frac{1}{m_{\mathrm{A}}} + \frac{1}{m_{\mathrm{B}}}\right)} \quad .$$

Nadefinujeme-li tzv. redukovanou hmotnost μ dvou srazivších se částic A a B vztahem

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_{\mathrm{A}}} + \frac{1}{m_{\mathrm{B}}} \quad ,$$

dostaneme pro jejich střední vzájemnou rychlost vztah formálně shodný se vztahem pro střední aritmetickou rychlost jedné částice

$$\bar{v}_{AB} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi\mu}} \quad ,$$

který se pro případ srážky dvou stejných částic A zjednoduší

$$\bar{v}_{AA} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_A}}\sqrt{2}$$
$$\bar{v}_{AA} = \bar{v}\sqrt{2} \quad .$$

Pro počet srážek jedné molekuly s ostatními molekulami stejného druhu za jednotku času pak dostaneme

$$\boxed{z_A = \pi d^2 \bar{v}\sqrt{2}\frac{N}{V}.}$$

- **Vzájemné srážky všech molekul stejného druhu za jednotku času v jednotce objemu z_{AA}**

$$z_{AA} = \frac{1}{2}\frac{N}{V}z_A \qquad [z_{AA}] = m^{-3}s^{-1}$$
$$z_{AA} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi d^2 \bar{v}\left(\frac{N}{V}\right)^2 \quad .$$

- **Vzájemné srážky molekul A s molekulami B za jednotku času v jednotce objemu z_{AB}**

$$z_{AB} = \frac{N_A}{V}z_A \quad ,$$

kde z_A představuje počet srážek jedné molekuly A s ostatními molekulami B, ke kterým dojde za jednotku času

$$z_{AB} = \frac{N_A}{V}\frac{N_B}{V}\pi d_{AB}^2 \bar{v}_{AB}$$
$$d_{AB} = \frac{d_A + d_B}{2}.$$

- **Střední volná dráha $\bar{l}$**

= průměrná dráha, kterou částice uletí mezi dvěma srážkami

$$\bar{l} = \frac{\bar{v}}{z_{\mathrm{A}}}$$

$$\boxed{\bar{l} = \frac{1}{\frac{N}{V}\pi d^2 \sqrt{2}} \quad .}$$

$$\Downarrow$$

- Střední volná dráha je nepřímo úměrná počtu částic v jednotce objemu – tedy tlaku plynu.
- Střední volná dráha **nezávisí na teplotě.**

4. Transportní jevy

Jako transportní jev se označuje jev, při kterém se v plynu transportuje (přenáší z jednoho místa na druhé) určitá molekulová vlastnost (energie, hybnost, látka). Konkrétně u plynů přichází v úvahu tři transportní jevy:

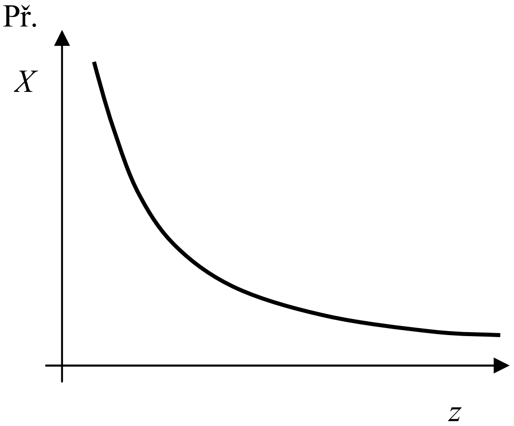
- **Difúze** = přenos látky z místa o vyšší koncentraci do místa o nižší koncentraci.
- **Tepelná vodivost** = přenos energie z místa o vyšší teplotě do místa o nižší teplotě.
- **Viskozita** = přenos hybnosti z místa o vyšší rychlosti do místa o nižší rychlosti.

Rychlost přenosu dané veličiny se vyjadřuje pomocí tzv. **toku veličiny *X* *J*(*X*)**, který je definován jako množství této veličiny, která projde jednotkou plochy za jednotku času

$$J(X) = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\,.$$

Z experimentálních pozorování víme, že tok dané veličiny je přímo úměrný příslušnému gradientu a probíhá proti tomuto gradientu.

Př.



Tok v kladném směru osy je kladný.

Veličina „teče“ v kladném směru osy *z,* ale její gradient je záporný

$$J(X) \propto -\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}z}$$

Pro jednotlivé transportní jevy byly experimentálně nalezeny tyto vztahy:

- difúze - 1. Fickův zákon

$$J(\text{látka}) = -D\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}z}$$ D - difúzní koeficient,

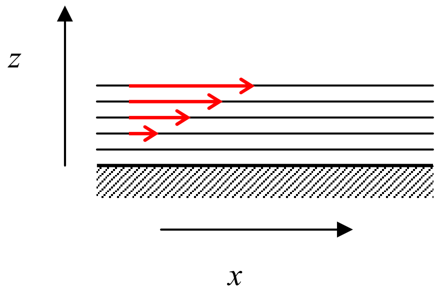
- tepelná vodivost - Fourierova rovnice

$$J(\text{energie}) = -\lambda\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$$ λ – koeficient tepelné vodivosti,

- viskozita - Newtonův zákon laminárního toku

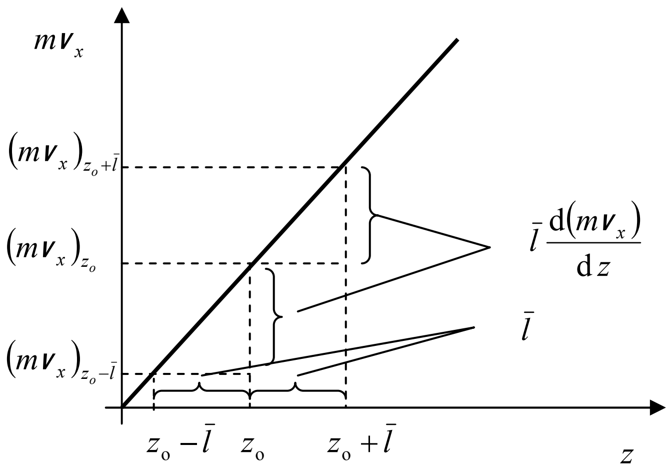
$$J(x\text{-ová složka hybnosti}) = -\eta \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z} \qquad \eta \text{ - viskozitní koeficient}$$

Viskozita



Viskozitní (brzdná) síla vzniká jako důsledek pohybu plynu. Budeme uvažovat případ, kdy se plyn pohybuje laminárně ve směru osy *x* podél pevné stěny. Laminární tok si lze představit tak, že se po sobě posouvají vrstvičky plynu. Vrstva přiléhající ke stěně se nepohybuje, rychlost následujících vrstev se lineárně zvyšuje ve směru osy *z*.

Molekuly plynu přeskakují mezi jednotlivými vrstvami a přitom přenáší do cílové vrstvy svoji hybnost (*x*-ovou složku), kterou měli v původní vrstvě. Vzdálenost mezi vrstvami lze ztotožnit se střední volnou dráhou, neboť hybnost molekul se mění při srážkách.



Do místa z_o umístíme „okénko“ o jednotkové ploše a budeme počítat, kolik molekul s jakou hybností přeskočí do tohoto okénka za jednotku času.

Do vrstvy v místě z_o přeskakují jednak molekuly z nižší vrstvy - v místě $z_o - \bar{l}$, jednak z vyšší vrstvy v místě $z_o + \bar{l}$. Hybnosti v těchto vrstvách si můžeme vyjádřit pomocí hybnosti ve vrstvě z_o a gradientu hybnosti. Vzhledem k lineární závislosti mv_x je tento gradient konstantní (je roven směrnici dané přímky). Platí:

$$(m v_x)_{z_o+\bar{l}} = (m v_x)_{z_o} + \bar{l}\,\frac{\mathrm{d}(m v_x)}{\mathrm{d}z}$$

$$(m v_x)_{z_o-\bar{l}} = (m v_x)_{z_o} - \bar{l}\,\frac{\mathrm{d}(m v_x)}{\mathrm{d}z}.$$

Pro tok x-ové složky hybnosti

v kladném směru osy z platí

$$\vec{J} = \frac{1}{4}\frac{N}{V}\bar{v}\left[(m v_x)_{z_o} - \bar{l}\,\frac{\mathrm{d}(m v_x)}{\mathrm{d}z}\right]$$

v záporném směru osy z platí

$$\overleftarrow{J} = -\frac{1}{4}\frac{N}{V}\bar{v}\left[(m v_x)_{z_o} + \bar{l}\,\frac{\mathrm{d}(m v_x)}{\mathrm{d}z}\right]$$

a tedy pro výsledný tok x-ové složky hybnosti dostaneme

$$J = \vec{J} + \overleftarrow{J} = -\frac{1}{2}\frac{N}{V}\bar{v}\,\bar{l}\,m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}z} \quad .$$

$$\Downarrow$$

Tok hybnosti je úměrný gradientu rychlosti.

Porovnáním s Newtonovou empirickou rovnicí dostaneme výraz pro viskozitní koeficient η

$$\boxed{\eta = \frac{1}{2}\frac{N}{V}\bar{v}\,\bar{l}\,m = \frac{1}{2}\rho\bar{v}\,\bar{l}}$$

a po úpravě

$$\eta = \frac{1}{2}m\frac{1}{\pi d^2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad .$$

$$\Downarrow$$

- η nezávisí na počtu částic v jednotce objemu, tedy na tlaku resp. hustotě plynu.
- Se zvyšující se teplotou η vzrůstá.